Chapitre 1 : Pack de démarrage
Feuille d'exercices

Exercice 1 (Révision de fonctions usuelles)
Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$
3. $f : x \mapsto e^{\sqrt{1-x}}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
6. $f : x \mapsto \ln(x^2)$
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$
8. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$
9. $f : x \mapsto \ln(|x+1|)$
10. $f : x \mapsto \ln(|x|+1)$
11. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{5-x}-1}$
12. $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$
13. $f : x \mapsto \ln(|\sin(x)|)$

Exercice 2 (Fonctions usuelles et simplification)
Simplifier (si une simplification est possible...) les écritures suivantes (où x est un réel tel que l'expression a un sens) :

1. $|x^2+x+1|$
2. $\sqrt{x^2}$
3. $\sqrt{x^2-2x+1}$
4. $\ln(e^4)$
5. $\ln(\sqrt{e})$
6. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$
7. $e^{\ln(2)-2\ln 3}$
8. $\dfrac{\sqrt{4}\sqrt{2}(\sqrt{\sqrt{8}})^2}{\sqrt{\sqrt{32}}}$
9. $\ln(25)-\ln(\dfrac{1}{5})+\ln 1$
10. $\dfrac{\ln(25)}{\ln(5)}$
11. $e^x e^{\frac{1}{2}\ln(4x)-x}$

Exercice 3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Traduire les phrases suivantes avec des quantificateurs :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0;1]$.
4. La fonction f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{T}$ un triangle. On considère les propositions suivantes :

A : $\mathcal{T}$ est un triangle rectangle.

B : le carré de la longueur du plus grand côté est la somme des carrés des longueurs des deux plus petits.

Pythagore a proposé les résultats suivants :

Th : Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés.

R : Si le carré de l'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux autres côtés, l'angle entre ces côtés est droit.

1. Traduisez le théorème Th et sa réciproque R en fonction des propositions A et B.
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Laquelle des deux propositions de Pythagore utiliseriez-vous pour dire que ABC n'est pas rectangle ?

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Que signifient les assertions suivantes pour cette fonction ?

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
5. $\forall x \in I, \exists C \in \mathbb{R}, f(x) = C$.
6. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y = f(x)$.
7. $\exists x \in I, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
8. $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
9. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.
10. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \leq M$.

Exercice 6 Soient E et F deux intervalles et soit une fonction $f : E \to F$. Expliquer ce que signifient les assertions ci–dessous puis :

1. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :
   A : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
   B : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.
   C : $\forall x, y \in E, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$.
2. Écrire la contraposée des implications suivantes :
   P : $x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq \beta$.
   Q : $a \in A \Rightarrow a \leq 1$.
   R : $\forall x, y \in E, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$.

Exercice 7 Écrire les relations suivantes à l'aide des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$. Dire lesquelles de ces propositions sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 0, il faut que x soit strictement supérieur à 1.
2. Pour que x soit supérieur ou égal à 0, il suffit que x soit strictement supérieur à 1.
3. Pour que x^2 soit supérieur ou égal à 4, il est nécessaire que x soit supérieur à 2.
4. x^3 est supérieur ou égal à 1 si et seulement si x est supérieur ou égal à 1.

Exercice 8
Utilisez un raisonnement par contraposition pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair également.

Exercice 9 (quelques récurrences)

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. On définit la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + 2n$. Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n(n-1)$.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + 4u_n}{3u_{n+1} + 2u_n}$. Déterminez la valeur de la suite u_n en fonction de n.
4. Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + 3v_n$. Calculer $v_2,\ v_3$ et montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq n\,5^n$.
5. On considère la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = w_{n+2} + 2w_{n+1} + 3w_n$. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq w_n \leq 3^n$.

Exercice 10 Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

1. $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3$.
2. $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + \ldots + 4x_n + 4x_{n+1}$.
3. $x_0 + x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}$.
4. $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n-1} + x_{2n}$.

Exercice 11 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} (k-3)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} (k-1)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 1$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 6$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (2k+1)$
7. $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 2}} i + 2j$
8. $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 2}} 2^{i+j}$
9. $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq 5} ij$
10. $\displaystyle\sum_{i+j=4} (-1)^i i^j$

Exercice 12 Transformer les sommes suivantes sous la forme proposée entre parenthèses :

1. $\sum_{p=0}^{9} a_{p+4}$ (forme : $\sum_{j=\square}^{\square} a_j$).
2. $\sum_{k=0}^{5} b_{2k} + \sum_{j=0}^{5} b_{2j+1}$ (forme : $\sum_{i=\square}^{\square} b_i$).
3. $\sum_{k=3}^{8} a_k + \sum_{j=1}^{6} b_{j-1}$ (forme : $\sum_{i=0}^{\square} a_{\square} + b_{\square}$).
4. $\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}$ (forme : $\sum_{k=\square}^{\square} x^k$).
5. $\sum_{p=1}^{5} p\ x^p$ (forme $x \sum_{q=0}^{\square} \square x^q$).

Exercice 13 Soit (u_n) une suite de nombres réels. Soit m et M deux entiers. On appelle somme télescopique toute somme de la forme

$$\sum_{k=m}^{M} \big(u_{k+1} - u_k\big)$$

1. Montrez que $\sum_{k=m}^{M} \big(u_{k+1} - u_k\big) = u_{M+1} - u_m$
2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$
   a) Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$
   b) En déduire S_n

Exercice 14 Soit $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On se propose de démontrer la formule du cours sans utiliser de récurrence.

1. Calculez S_n pour $q = 1$
2. On suppose maintenant $q \neq 1$.
   a) En faisant apparaitre une somme télescopique, calculez $(1-q)S_n$
   b) En déduire que pour $q \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3. Exprimez en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^{n} q^k$, puis $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour tout $p \leq n$.
4. Calculez les sommes doubles suivantes :
   $$S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^{i+j} \text{ et } T = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^{i-j}$$

Exercice 15 Écrire les produits suivants à l'aide du symbole $\prod$:

1. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times (20)$
2. $\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) \times \ldots \times \cos(nx)$
3. $a_p^3 a_{p+1}^3 \ldots a_n^3$
4. $(X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}(X-\alpha_3)^{n_3}\ldots(X-\alpha_p)^{n_p}$

Exercice 16

1. Montrez que $\prod_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_0}{a_{n+1}}$ et $\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$.
2. En déduire les valeurs de $P_1 = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ et de $P_2 = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 17 Calculer les quantités suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Exercice 18 Soient a et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier positif n on a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Exercices supplémentaires, non corrigés en classe

Exercice 19 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$
3. $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 20 Soient $n,\ p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$